Deret Taylor dan Analisis Galat

Kuliah ke-2 IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Deret Taylor

- **Kakas** (*tools*) yang sangat penting dalam metode numerik adalah **deret Taylor**.

- Deret Taylor adalah kakas yang utama untuk menurunkan suatu metode numerik.

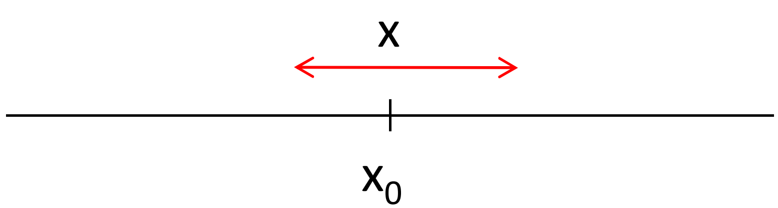
- Dere Taylor berguna untuk menghampiri fungsi ke dalam bentuk polinom

- Fungsi yang rumit menjadi sederhana dengan deret Taylor

Definisi Deret Taylor

Andaikan *f* dan semua turunannya, *f'*, *f''*, *f'''*, ..., menerus di dalam selang [*a*, *b*]. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai *x* di sekitar x_0 (Gambar 2.1) dan $x \in [a, b]$, *f*(*x*) dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \ldots$$



Misalkan $x - x_0 = h$, maka:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots \frac{h}{m!} f^{(m)}(x_0) + \ldots$$

Contoh 1: Hampiri fungsi $f(x) = \sin(x)$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 1$.

Penyelesaian:

$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''x) = -\sin(x)$,

$f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$, ...

$$\sin(x) = \sin(1) + \frac{(x-1)}{1!}\cos(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}(-\sin(1)) + \frac{(x-1)^3}{3!}(-\cos(1)) + \frac{(x-1)^4}{4!}\sin(1) + \ldots$$

Bila dimisalkan $x - 1 = h$, maka,

$$\sin(x) = \sin(1) + h\cos(1) + \frac{h^2}{2}(-\sin(1)) + \frac{h^3}{6}(-\cos(1)) + \frac{h^4}{24}\sin(1) + \ldots$$

$$= 0.8415 + 0.5403h - 0.4208h^2 - 0.0901h^3 + 0.0351h^4 + \ldots$$

- Kasus khusus: jika $x_0 = 0$, maka deretnya dinamakan **deret Maclaurin**, yang merupakan deret Taylor baku.

- **Contoh 2**: sin(x), e^x, cos(x) dan ln(x +1) masing-masing dalam deret Maclaurin

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{(x-0)}{1!}\cos(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}(-\sin(0)) + \frac{(x-0)^3}{3!}(-\cos(0)) + \frac{(x-0)^4}{4!}\sin(0) + \ldots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$e^x = e^{(0)} + \frac{(x-0)}{1!}e^{(0)} + \frac{(x-0)^2}{2!}e^{(0)} + \frac{(x-0)^3}{3!}e^{(0)} + \frac{(x-0)^4}{4!}e^{(0)} + \ldots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\ln(x+1) = \ln(0+1) + \frac{(x-0)}{1!}(0+1)^{-1}$$

$$+ \frac{(x-0)^2}{2!}(-(0+1)^{-2}) + \frac{(x-0)^3}{3!}2(0+1)^{-3}$$

$$+ \frac{(x-0)^4}{4!}(-6(0+1)^{-4}) + \ldots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

- Karena suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka -untuk alasan praktis- deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu.

- Deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-*n* dinamakan **deret Taylor terpotong** dan dinyatakan oleh:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \qquad x_0 < c < x$$

Galat/residu/sisa

- Deret Taylor terpotong di sekitar $x_0 = 0$ disebut **deret Maclaurin terpotong**.

  Contoh 3:

  $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + R_5(x)$; $R_5(x) = \frac{x^6}{6!}\cos(c)$

  $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + R_4(x)$; $R_4(x) = \frac{x^5}{5!}e^c$

  $\cos(x) = 1 - x^2/4! + x^4/6! - x^6/6! + R_6(x)$; $R_6(x) = \frac{x^7}{7!}\cos(c)$

  $\ln(x+1) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4; + R_4(x)$; $R_4(x) = \frac{x^5}{5!}(c+1)^{-5}$

  yang dalam hal ini, $0 < c < x$.

- **Contoh 4**: Hitung hampiran nilai cos(0.2) = …

  Jawab: $\cos(0.2) \approx 1 - 0.2^2/2 + 0.2^4/24 - 0.2^6/720$

  $= 0.9800667$

Analisis Galat

- Solusi dengan metode numerik adalah solusi hampiran (aproksimasi)
- Hampiran terhadap solusi eksak
- Oleh karena itu, solusi numerik mengandung galat.
- **Galat** (ε): perbedaan antara solusi hampiran dengan solusi eksak.

  Definisi: $\varepsilon = a - \hat{a}$

- Galat mutlak: $|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$

- Galat relatif: $\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{a}$ atau $\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{a} \times 100\%$
- Galat relatif hampiran: $\varepsilon_{RA} = \dfrac{\varepsilon}{\hat{a}}$

- **Contoh 5**: Misalkan nilai sejati = 10/3 dan nilai hampiran = 3.333. Hitunglah galat, galat mutlak, galat relatif, dan galat relatif hampiran.

  Penyelesaian**:**

  galat = 10/3 – 3.333 = 10/3 – 3333/1000
  = 1/3000 = 0.000333…

  galat mutlak = | 0.000333…| = 0.000333…

  galat relatif = (1/3000)/(10/3) = 1/1000 = 0.0001

  galat relatif hampiran = (1/3000)/3.333 = 1/9999

Sumber utama galat:

1. Galat pemotongan (*truncation error*)
2. Galat pembulatan (*round-off error*)

- **Galat pemotongan**: galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak

  Contoh: hampiran cos(*x*) dengan deret McLaurin:

$$\cos(x) \approx \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{\text{nilai hampiran}} \;\Big|\; \underbrace{+ \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}}_{\text{galat pemotongan}} + \ldots$$

pemotongan

- **Galat pembulatan**: galat yang timbul akibat keterbatasan komputer dalam merepresentasikan bilangan riil.

- **Contoh 6:** 1/6 = 0.1666666666… , dalam mesin dengan 6-digit direpresentasikan sebagai 0.166667.

  Galat pembulatan = 1/6 – 0.166667 = -0.000000333.

- Contoh dalam sistem biner misalnya 1/10 = $0.000110011001100110011001100110011\ldots_2$ direpresentasikan di dalam komputer dalam jumlah bit yang terbatas.

Representasi bilangan riil di dalam komputer:

1. Bilangan titik-tetap (*fixed-point*)

   Setiap bilangan riil disajikan dengan jumlah tempat desimal yang tetap

   Contoh: 62.358, 0.013, 1.000.

2. Bilangan titik-kambang (*floating-point*)

   Setiap bilangan riil disajikan dengan jumlah digit *berarti* yang sudah tetap

   Contoh: 0.6238×10^3 , 0.1714×10^{-13}

Angka Bena (signifikan)

- Angka bena adalah angka bermakna, angka penting, atau angka yang dapat digunakan dengan pasti
- Contoh:

43.123	memiliki 5 angka bena (yaitu 4, 3, 1, 2, 3)
0.1764	memiliki 4 angka bena (yaitu 1, 7, 6, 4)
0.0000012	memiliki 2 angka bena (yaitu 1, 2)
278.300	memiliki 6 angka bena (yaitu 2, 7, 8, 3, 0, 0)
270.0090	memiliki 7 angka bena (yaitu 2, 7, 0, 0, 0, 9, 0)
0.0090	memiliki 2 angka bena (yaitu 9, 0)

1360, 1.360, 0.001360 semuanya memiliki 4 angka bena

- Komputer hanya menyimpan sejumlah tertentu angka bena.

- Bilangan riil yang jumlah angka benanya melebihi jumlah angka bena komputer akan disimpan dalam sejumlah angka bena komputer itu.

- Pengabaian angka bena sisanya itulah yang menimbulkan galat pembulatan.

- **Galat total**: adalah galat akhir pada solusi numerik merupakan jumlah galat pemotongan dan galat pembulatan.

  Contoh 7:

$$\cos(0.2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{galat} \\ \text{pemotongan}}}{\approx} 1 - 0.2^2/2 + 0.2^4/24 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{galat} \\ \text{pembulatan}}}{\approx} 0.9800667$$

  Pada contoh di atas, galat pemotongan timbul karena kita menghampiri cos(0.2) sampai suku orde empat, sedangkan galat pembulatan timbul karena kita membulatkan nilai hampiran ke dalam 7 digit bena.

Bilangan Titik-Kambang

- Bilangan riil di dalam komputer umumnya disajikan dalam format *bilangan titik-kambang*
- Bilangan titik-kambang a ditulis sebagai

$$a = \pm m \times B^p = \pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots d_n \times B^p$$

m = mantisa (riil), $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots d_n$ adalah digit mantisa.

B = basis sistem bilangan yang dipakai (2, 8, 10, 16, dsb)

p = pangkat (berupa bilangan bulat), dari $-P_{\text{min}}$ sampai $+P_{\text{maks}}$

- Contoh: 245.7654 → 0.2457654×10^3

Bilangan Titik-Kambang Ternormalisasi

- Syarat: digit mantis yang pertama tidak boleh 0

$$a = \pm m \times B^{p} = \pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots d_n \times B^p$$

$$1 \le d_1 \le b - 1 \text{ dan } 0 \le d_k \le B\text{-}1 \text{ untuk } k > 1.$$

- Pada sistem desimal, $1 \le d_1 \le 9$ dan $0 \le d_k \le 9$, sedangkan pada sistem biner, $d_1 = 1$ dan $0 \le d_k \le 1$.

- Contoh 8: $0.0563 \times 10^{-3} \rightarrow 0.563 \times 10^{-4}$,

  $0.00023270 \times 10^{6} \rightarrow 0.23270 \times 10^{3}$.

Pembulatan pada Bilangan Titik-Kambang

- Bilangan riil di dalam komputer mempunyai rentang nilai yang terbatas.
- Bilangan titik-kambang yang tidak dapat mencocoki satu dari nilai-nilai di dalam rentang nilai yang tersedia, dibulatkan ke salah satu nilai di dalam rentang.
- Galat yang timbul akibat penghampiran tersebut diacu sebagai **galat pembulatan**.

- Ada dua teknik pembulatan yang lazim dipakai oleh komputer, yaitu **pemenggalan** (*chopping*) dan **pembulatan ke digit terdekat** (*in-rounding*).

Pemenggalan (*chopping*)

Misalkan $a = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n d_{n+1} \ldots \times 10^p$

$fl_{\text{chop}}(a) = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1} d_n \times 10^p$

Contoh: $\pi = 0.31459265358\ldots \times 10^0$

$fl_{\text{chop}}(\pi) = 0.3141592 \times 10^0$ (6 digit mantis)

Galat = 0.00000065...

Pembulatan ke digit terdekat (*in-rounding*)

Misalkan $a = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n d_{n+1} \ldots \times 10^p$

$fl_{\text{round}}(a) = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots \hat{d}_n \times 10^p$

$$\hat{d}_n = \begin{cases} d_n & \text{, jika } d_{n+1} < 5 \\ d_n + 1 & \text{, jika } d_{n+1} > 5 \\ d_n & \text{, jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan } n \text{ genap} \\ d_n + 1 & \text{, jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

- **Contoh 9**: $a = 0.5682785715287 \times 10^{-4}$:
  - di dalam komputer 7 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.5682786 \times 10^{-4}$
  - di dalam komputer 8 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.56827857 \times 10^{-4}$
  - di dalam komputer 6 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.568278 \times 10^{-4}$
  - di dalam komputer 9 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.568278572 \times 10^{-4}$

Aritmetika Bilangan Titik-Kambang

- Kasus 1: Penjumlahan (termasuk pengurangan) bilangan yang sangat kecil ke (atau dari) bilangan yang lebih besar menyebabkan timbulnya galat pembulatan.

Contoh 10: Misalkan digunakan komputer dengan mantis 4 digit (basis 10). Hitunglah

$$1.557 + 0.04381 = 0.1557 \times 10^{1} + 0.4381 \times 10^{-1}$$

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{lll}
0.1557 \times 10^{1} & = & 0.1557 \quad \times 10^{1} \\
0.4381 \times 10^{-1} & = & 0.004381 \times 10^{1} + \\
\hline
 & = & 0.160081 \times 10^{1}
\end{array}
$$

in-rounding $\rightarrow 0.1601 \times 10^{1}$

chopping $\rightarrow 0.1600 \times 10^{1}$

- Galat pembulatan = $\left| (0.160081 \times 10^{1}) - (0.1601 \times 10^{1}) \right|$
  = 0.000019
- Galat pemenggalan = $\left| (0.160081 \times 10^{1}) - (0.1600 \times 10^{1}) \right|$
  = 0.000081

- Tips: untuk menjumlahkan deret bilangan, selalu jumlahkan dari yang kecil-kecil lebih dahulu, baru menjumlahkan dengan bulangan yang lebih besar

- Contoh*:* *x* = 1.0 + $\sum_{i=1}^{10000} 0.00001$ = 1.0 + $\underbrace{0.00001 + 0.00001 + \ldots + 0.00001}_{10000\ \text{kali}}$
  Jumlahkan dulu 0.00001 sebanyak 1000 kali, baru jumlahkan dengan 1.0

- <u>Kasus 2</u>: Pengurangan dua buah bilangan yang hampir sama besar (*nearly equal*).

- Bila dua bilangan titik-kambang dikurangkan, hasilnya mungkin mengandung nol pada posisi digit mantis yang paling berarti (posisi digit paling kiri).

- Keadaan ini dinamakan **kehilangan angka bena** *(loss of significance*). Baik pemenggalan maupun pembulatan ke digit terdekat menghasilkan jawaban yang sama.

- **Contoh 11**: Kurangi 0.56780×10^5 dengan 0.56430×10^5 (5 angka bena)

Penyelesaian:

$$\begin{array}{l} 0.56780 \times 10^5 \\ 0.56430 \times 10^5 \; - \\ \hline 0.00350 \times 10^5 \end{array} \rightarrow \text{normalisasi: } 0.350 \times 10^3$$

(3 angka bena)

in-rounding $\rightarrow 0.350 \times 10^3$

chopping $\rightarrow 0.350 \times 10^3$

Hasil yang diperoleh hanya mempunyai 3 angka bena. Jadi kita kehilangan 2 buah angka bena

- **Contoh 12**: Kurangi 3.1415926536 dengan 3.1415957341 (11 angka bena).

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{l}
3.1415926536 = 0.31415926536 \times 10^{1} \\
3.1415957341 = 0.31415957341 \times 10^{1} \;\; - \\
\hline
\qquad\qquad -0.30805 \times 10^{-5} \quad \text{(5 angka bena)}
\end{array}
$$

in-rounding $\rightarrow -0.30805 \times 10^{-5}$

chopping $\rightarrow -0.30805 \times 10^{-5}$

Jadi, kita kehilangan 6 angka bena!.

- **Contoh 13**. Diberikan $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ Hitunglah *f*(500) dengan menggunakan 6 angka bena dan pembulatan ke digit terdekat.

  Penyelesaian:

$$f(500) = 500(\sqrt{501} - \sqrt{500})$$

= 500(22.3830 - 22.3607)

= 500(0.0223)

= 11.15 (empat angka bena)

(solusi eksaknya adalah 11.174755300747198..)

Hasil yang tidak akurat ini disebabkan adanya operasi pengurangan dua bilangan yang hampir sama besar, yaitu 22.3830 - 22.3607.

Cara komputasi yang lebih baik:

$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$= x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x[(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2]}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = p(x)$$

$$p(500) = \frac{500}{\sqrt{501} + \sqrt{500}} = \frac{500}{22.3830 + 22.3607} = 11.1748$$

- **Soal Latihan**. Carilah cara yang lebih baik untuk menghitung:

  (i) $f(x) = (x - \sin(x))/\tan(x)$ untuk x mendekati nol

  (ii) $f(x) = x - \sqrt{(x^2 - a)}$ untuk x yang jauh lebih besar dari a

  (iii) $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ untuk x di sekitar $\pi/4$

  (iv) $f(x) = \log(x + 1) - \log(x)$ untuk x yang besar

  (v) $(1 + \alpha)^{1/2} - 1$, $|\alpha| \leq 0.01$ sampai enam angka bena

  (vi) $\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha)$ untuk x yang kecil

  (vii) $(a + x)^n - a^n$ untuk x yang kecil

  (viii) $((x^3 - 3x^2) + 3x) - 1$ untuk $x = 2.72$

  (ix) $\sqrt{(1 + \cos x)/2}$ untuk $x \approx \pi/4$

Kondisi Buruk (*Ill Conditioned*)

- Suatu persoalan dikatakan **berkondisi buruk** (*ill conditioned*) bila jawabannya sangat peka terhadap perubahan kecil data (misalnya perubahan kecil akibat pembulatan).
- Ciri-ciri: Bila kita mengubah sedikit data, maka jawabannya berubah sangat besar (drastis).

- Lawan dari berkondisi buruk adalah **berkondisi baik** (*well conditioned*).
- Suatu persoalan dikatakan berkondisi baik bila perubahan kecil data hanya mengakibatkan perubahan kecil pada jawabannya.

- Contoh: persoalan menghitung akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan mengubah nilai c

(i) $x^2 - 4x + \boldsymbol{3.999} = 0 \Rightarrow x_1 = 2.032$ dan $x_2 = 1.968$

(ii) $x^2 - 4x + \boldsymbol{4.000} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2.000$

(iii) $x^2 - 4x + \boldsymbol{4.001} = 0 \Rightarrow$ akar-akarnya imajiner!

- Kesimpulan: persoalan akar-akar persamaan kuadrat di atas berkondisi buruk

- Kapankah akar persamaan $f(x) = 0$ berkondisi buruk?

- Misalkan $f(x)$ diubah sebesar ε sehingga akarnya berubah sebesar h:

$$f(x + h) + \varepsilon = 0$$

- Bila karena pengubahan ε yang sangat kecil mengakibatkan h menjadi besar, dikatakan persoalan mencari akar $f(x) = 0$ berkondisi buruk

Contoh lain: persoalan mencari mencari solusi sistem persamaan lanjar

(i) $x + y = 2$

$x + 0.9999y = 1.9999$

→ Solusi: $x = y = 1.0000$

(ii) $x + y = 2$

$x + 0.9999y = 2.0010$

→ Solusi: $x = 12$, $y = -10$

(iii) $x + y = 2$

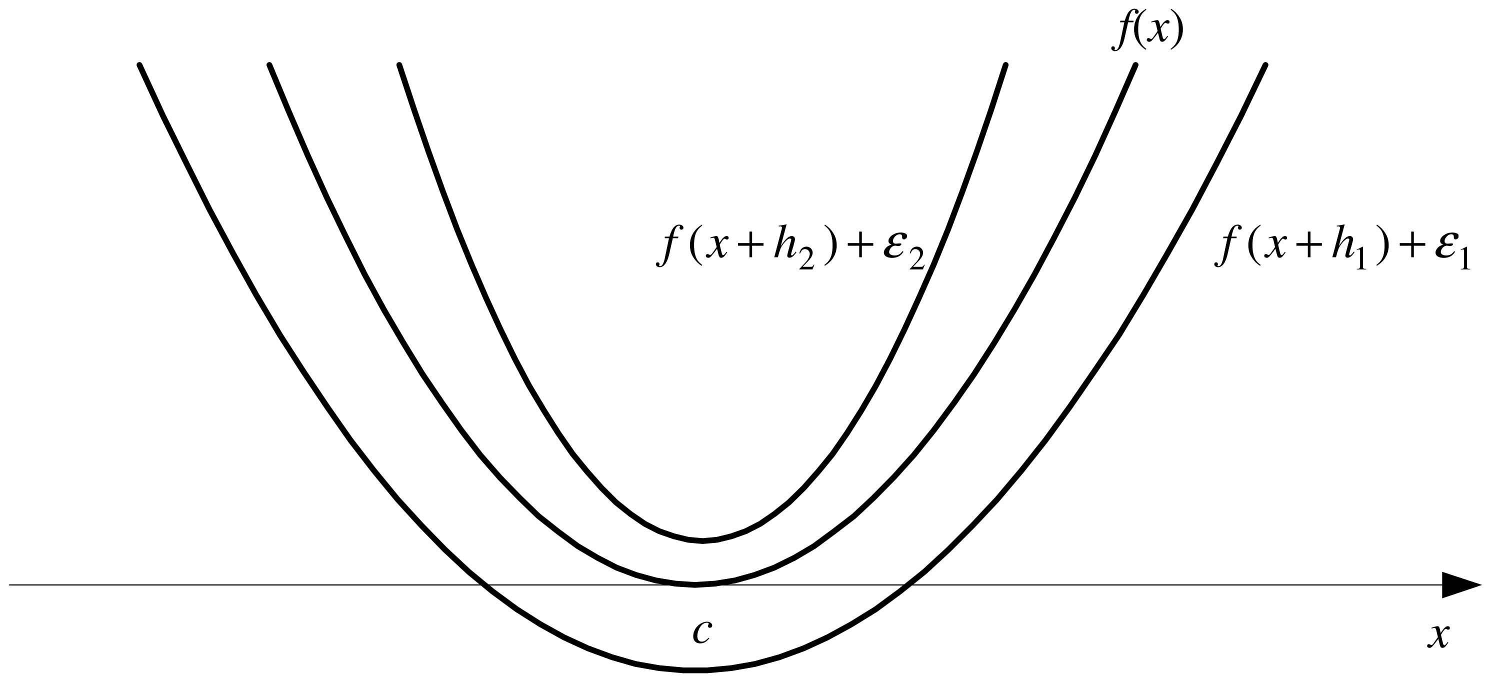
$x + y = 1.9999$

→ Solusi: tidak ada

(iv) $x + y = 2$

$x + y = 2$

→ Solusi: tidak berhingga, yaitu disepanjang garis $x + y = 2$


$f(x)$
$f(x+h_2)+\varepsilon_2$
$f(x+h_1)+\varepsilon_1$
c
x